Perturbación de los valores propios simples de matrices de polinomios dependientes diferenciablemente de parámetros

M. Isabel García-Planas[1], Sonia Tarragona[2]

[1] *Dpt. de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona. E-mail:* maria.isabel.garcia@upc.edu.

[2] *Dpto. de Matemáticas, Universidad de León, León. E-mail:* sonia.tarragona@unileon.es.

Resumen

Sea $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_i(p)$ una familia de matrices polinomiales mónica dependiente diferenciablemente de parámetros reales. Las matrices polinomiales aparecen de forma natural asociadas a los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de la forma $\sum_{i=0}^{k} A_i x^{(i)}(t) = f(t)$. De especial relevancia es el caso de los sistemas diferenciales lineales de segundo orden, ya que aparecen en muchas aplicaciones de ingeniería. En este trabajo se estudia el comportamiento de los valores propios de una familia de matrices polinomiales mónicas, $P(\lambda)$, obteniendo fórmulas explícitas describiendo el comportamiento de los valores y vectores propios correspondientes, en función de los parámetros.

El estudio de la variación de los valores propios de una matriz polinomial, dependiente diferenciablemente de parámetros, es, por sus múltiples aplicaciones, de gran interés.

La teoría de perturbaciones de valores y vectores propios de matrices cuadradas está bien establecida. En este trabajo se extienden, a las matrices polinomiales, algunos de estos resultados. El resultado obtenido es un punto clave para los estudios de estabilidad, ya que permite analizar las singularidades en la frontera de la estabilidad. Es bien sabido, que el estudio de la estabilidad, para muchos problemas mecánicos y sistemas de control, se reduce al análisis de valores propios de la matriz polinomial asociada a la ecuación diferencial.

Palabras clave: Matriz polinomial, Valores propios, Perturbaciones.

1. Introducción

Los valores propios desempeñan un papel importante en situaciones en que la matriz polinomial es una aplicación lineal de un espacio vectorial sobre sí mismo. Como ejemplo tenemos los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias. Los valores de los valores propios pueden corresponder a las frecuencias de vibración, a los valores críticos de los parámetros de estabilidad o a los niveles de energía de los átomos, entre otros.

Los valores propios de algunas matrices son sensibles a las perturbaciones. Pequeños cambios en los elementos de la matriz pueden dar lugar a grandes cambios en los valores propios. Los errores de redondeo introducidos durante el cálculo de los valores propios con aritmética de coma flotante, tienen el mismo efecto que vistos como perturbaciones en la matriz original. En consecuencia, estos errores de redondeo se magnifican en los cálculos de los valores de los valores propios sensibles.

El estudio del comportamiento de los valores propios, tanto simples como múltiples, de una matriz dependiente diferenciablemente de parámetros, tiene un gran interés por sus múltiples aplicaciones. La teoría de perturbaciones para los valores y vectores propios de matrices cuadradas está bien establecida, ver [6] por ejemplo. En este trabajo se extienden algunos de estos resultados a matrices polinomiales.

El resultado obtenido es un punto clave para estudiar la estabilidad y la inestabilidad, ya que permite analizar las singularidades en la frontera de la estabilidad. Es bien sabido que el estudio de la estabilidad, para muchos problemas mecánicos y sistemas de control, se reduce al análisis de los valores propios de la matriz polinomial asociada a la ecuación diferencial. Así también, la estabilidad asintótica se logra cuando todos los valores propios de la matriz polinomial se encuentran a la izquierda del semiplano complejo. Las matrices polinomiales que poseen esta propiedad se dice que son estables.

2. Matrices polinomiales

Una matriz polinomial cuadrada de orden n y grado k es un polinomio cuyos coeficientes son matrices de la forma

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_i, \quad A_0, \dots, A_k \in M_n(\mathbb{F}), \tag{1}$$

donde $\mathbb{F}$ es el cuerpo de los números reales o complejos. Nos centramos en matrices polinomiales mónicas. Una matriz polinomial $P(\lambda)$ se dice que es mónica si $A_k = I_n$. Las matrices polinomiales como las definidas en (1) aparecen asociadas de forma natural a los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

$$A_k x^{(k)}(t) + A_{k-1} x^{(k-1)}(t) + \dots + A_1 x^1(t) + A_0 x(t) = f(t) \tag{2}$$

donde $x(t)$ es una función vectorial real con n coordenadas (incógnitas), $x^{(j)}(t)$ denota la j-ésima derivada de $x(t)$ y $f(t)$ es otra función vectorial con n coordenadas. De particular relevancia es el caso de sistemas lineales de segundo orden, ya que aparecen en muchas aplicaciones de ingeniería.

Los valores propios de una matriz polinomial $P(\lambda)$ son los ceros del polinomio escalar de grado nk, $\det P(\lambda)$.

Sea λ_0 un valor propio de la matriz polinomial $P(\lambda)$, entonces existe un vector $v_0 \neq 0$ tal que $P(\lambda_0)(v_0) = 0$, este vector recibe el nombre de vector propio.

Llamaremos cadena de Jordan de longitud $k+1$ para $P(\lambda)$ correspondiente al número complejo λ_0 a la sucesión de vectores n-dimensionales $v_0, \dots, v_k$ tales que

$$\sum_{\ell=0}^{i} \frac{1}{\ell!} P^{(\ell)}(\lambda_0) v_{i-\ell} = 0, \quad i = 0, \dots, k \tag{3}$$

donde $P^{(\ell)}$ denota la ℓ-derivada de $P(\lambda)$ con respecto a la variable λ. Si λ_0 es un valor propio, entonces existe una cadena de Jordan de longitud al menos 1, formada por el vector propio.

Sea λ_0 un valor propio de $P(\lambda)$, como $\det P^t(\lambda_0) = \det P(\lambda_0) = 0$, entonces λ_0 es un valor propio de $P^t(\lambda)$. Para este valor propio existe un vector propio u_0, esto es $P^t(\lambda_0)(u_0) = 0$, equivalentemente $u_0^t P(\lambda_0) = 0$, por lo que u_0 recibe el nombre de vector propio por la izquierda de valor propio λ_0 de $P(\lambda)$.

Lema 1 *Sea λ_0 un valor propio simple de $P(\lambda)$. Entonces dado un vector propio v_0, existe un vector propio por la izquierda u_0 tal que $u_0^t v_0 \neq 0$.*

Demostración: Sea v_0 un vector propio de $P(\lambda)$ de valor propio simple λ_0, entonces v_0 es un vector del núcleo del endomorfismo $P(\lambda_0)$. Consideremos una base ortonormal completada de v_0 y escribamos la matriz del endomorfismo en esta base

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

al ser la matriz en bases ortonormales tenemos que la matriz de $P^t(\lambda_0)$ es su traspuesta, de donde el subespacio $[v_0]^\perp$ es invariante por el endomorfismo $P^t(\lambda_0)$.

Si $u_0 \in [v_0]^\perp$ entonces 0 es valor propio de

$$\begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

por lo que λ_0 es valor propio de $P(\lambda)$ de multiplicidad al menos 2, lo que contradice la hipótesis de que el valor propio es simple, de donde $u_0 \notin [v_0]^\perp$ y $u^t v_0 \neq 0$. □

Un vector polinomial $p(\lambda)$ de dimensión n, recibe el nombre de raíz polinomial si y sólo si $p(\lambda_0) \neq 0$ y $P(\lambda_0)p(\lambda_0) = 0$. El orden de λ_0 como cero de $P(\lambda)p(\lambda)$ recibe el nombre de orden de la raíz polinomial. (Nótese que el orden de una raíz polinomial es menor o igual que la multiplicidad de λ_0 como raíz de $\det P(\lambda)$.

Para más información ver [5] o [4] por ejemplo.

3. Perturbación de valores propios simples

Sea $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_i$ una matriz polinomial y supongamos que las matrices A_i dependen diferenciablemente del vector p de parámetros reales $p = (p_1, \dots, p_n)$. La función $P(\lambda; p) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_i(p)$ recibe el nombre familia multiparamétrica de matrices polinomiales. Los valores propios de la función de matrices polinomiales son funciones continuas del vector p de parámetros. En esta sección vamos a estudiar el comportamiento de un valor propio simple de la familia de matrices polinomiales $P(\lambda; p)$.

Sea $\lambda(p)$ un valor propio simple de la matriz polinomial $P(\lambda; p)$. Puesto que $\lambda(p)$ es una raíz simple del polinomio $\det P(\lambda)$, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \det P(\lambda; p) \neq 0. \qquad (4)$$

La expresión (4) nos permite aplicar el teorema de la función implícita a la ecuación $\det P(\lambda; p) = 0$, y observamos que el valor propio $\lambda(p)$ de la familia de matrices polinomiales, dependiente diferenciablemente del vector de parámetros p, y sus derivadas con respecto a los parámetros son

$$\frac{\partial \lambda(p)}{\partial p_i} = -\frac{\dfrac{\partial}{\partial p_i} \det P(\lambda; p)}{\dfrac{\partial}{\partial \lambda} \det P(\lambda; p)}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Ejemplo 1

$$P(\lambda; p) = \begin{pmatrix} \lambda - p_1 & -p_1 & p_1 + p_2 \\ 0 & \lambda - p_1 & p_1 - p_2 \\ 0 & 0 & \lambda - p_2 \end{pmatrix}.$$

$\det P(\lambda; p) = (\lambda - p_1)^2(\lambda - p_2)$, entonces existen dos valores propios $\lambda_1(p) = p_1$ doble y $\lambda_2(p) = p_2$ simple.

Para todo (λ, p_1, p_2) tal que $\det P(\lambda; p) \neq 0$ podemos aplicar el teorema de la función implícita, en particular en el punto (p_2, p_1, p_2).

$$\frac{\partial \lambda(p)}{\partial p_1} = \frac{2(\lambda - p_2)}{3\lambda - 2p_2 - p_1}, \qquad \frac{\partial \lambda(p)}{\partial p_2} = \frac{\lambda - p_1}{3\lambda - 2p_2 - p_1}.$$

En el punto (p_2, p_1, p_2) tenemos $\dfrac{\partial \lambda(p)}{\partial p_1} = 0$ y $\dfrac{\partial \lambda(p)}{\partial p_2} = 1$.

Teniendo en cuenta que $\lambda(p)$ es un valor propio simple y que la suma de las longitudes de las cadenas de Jordan en un conjunto canónico, es la multiplicidad de los valores propios como ceros $\det P(\lambda; p)$, tenemos que las cadenas de Jordan consisten sólo de vectores propios.

El vector propio $v_0(p)$ correspondiente al valor propio simple $\lambda(p)$ es determinado salvo un factor escalar α no nulo. Este vector propio determina un subespacio de nulidad de dimensión uno del operador matricial $P(\lambda(p); p)$ diferenciablemente dependiente de p. Por lo tanto, el vector propio $v_0(p)$ puede ser escogido como una función diferenciable de los parámetros.

En el ejemplo 1 los vectores propios son $v_0(p) = \alpha(p_2, p_1 - p_2, p_1 - p_2)$, con $\alpha \neq 0$. En general los vectores propios no son obtenidos tan fácilmente. Vamos a tratar de obtener una aproximación mediante sus derivadas.

De ahora en adelante y si no hay confusión posible, escribiremos λ en lugar de $\lambda(p)$.

Sea

$$P(\lambda; p) = \lambda^k I_n + \lambda^{k-1} A_{k-1}(p) + \ldots + \lambda A_1(p) + A_0(p)$$

una matriz polinomial mónica de grado k.

Si $P(\lambda; p)$ tiene un valor propio simple $\lambda(p)$ entonces existe un vector propio $v_0(p)$ tal que

$$P(\lambda(p); p) v_0(p) = 0.$$

Tomando las derivadas con respecto a p_i tenemos

$$\begin{aligned}(k\lambda^{k-1}\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}I_n + (k-1)\lambda^{k-2}\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}A_{k-1}(p) + \lambda^{k-1}\frac{\partial A_{k-1}(p)}{\partial p_i} + \ldots +\\ +\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}A_1(p) + \lambda\frac{\partial A_1(P)}{\partial p_i} + \frac{\partial A_0(p)}{\partial p_i})v_0(p) + P(\lambda;p)\frac{\partial v_0(p)}{\partial p_i} = 0\end{aligned}$$

$$(\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}(\frac{\partial}{\partial\lambda}P(\lambda;p)) + \frac{\partial P(\lambda;p)}{\partial p_i})v_0(p) = -P(\lambda;p)\frac{\partial v_0(p)}{\partial p_i}$$

Sea p_0 tal que $\lambda(p_0) = \lambda_0$ es un valor propio simple y $v_0(p_0)$ un vector propio. Consideramos un vector propio por la izquierda u_0 para este valor propio.

Lema 2 *Existe un vector propio por la izquierda tal que*

$$u_0^t\frac{\partial}{\partial\lambda}P(\lambda;p)_{|(\lambda_0,p_0)}v_0(p_0) \neq 0$$

Demostración: Si $u_0^t\frac{\partial}{\partial\lambda}P(\lambda;p)_{|(\lambda_0,p_0)}v_0(p_0) = 0$, entonces $\frac{\partial}{\partial\lambda}P(\lambda;p)_{|(\lambda_0,p_0)}v_0(p_0) \in [u_0]^\perp$, pero $[u_0]^\perp = \operatorname{Im} P(\lambda_0,p_0)$ ya que λ_0 es simple.

En estas condiciones, tenemos que el vector $\frac{\partial}{\partial\lambda}P(\lambda;p)_{|(\lambda_0,p_0)}v_0(p_0)$ es una combinación lineal de columnas de $P(\lambda_0;p_0)$, es decir existe v_1 tal que

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}P(\lambda;p)_{|(\lambda_0,p_0)}v_0(p_0) = P(\lambda_0;p_0)v_1$$

equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}P(\lambda;p)_{|(\lambda_0,p_0)}v_0(p_0) + P(\lambda_0;p_0)(-v_1) = 0$$

Pero, esto no es posible puesto que la longitud de las cadenas de Jordan para valores propios simples es uno. □

Proposición 1 La matriz $T_0 = P(\lambda_0;p_0) + u_0u_0^t$ es invertible.

Demostración: $u_0u_0^t$ es un endomorfismo simétrico de rango 1. El vector u_0 es un vector propio de valor propio $\|u_0\|^2$; por tanto $[u_0]^\perp$ es el subespacio de vectores propios de valor propio 0.

Sea ahora, $w \in \operatorname{Ker} T_0$, entonces $w = \alpha u_0 + w_1$ con $w_1 \in [u_0]^\perp$. Entonces,

$$\begin{aligned}0 = u_0^tT_0(w) &= u_0^t(P(\lambda_0;p_0) + u_0u_0^t)(\alpha u_0 + w_1)\\ &= \alpha u_0^tP(\lambda;p_0)u_0 + \alpha u_0^tu_0u_0^tu_0 + u_0^tP(\lambda_0;p_0)w_1 + u_0^tu_0u_0^tw_1\\ &\underset{(a)}{=} \alpha(u_0^tu_0)^2\end{aligned}$$

(a) observar que u_0 es un vector propio por la izquierda de $P(\lambda;p_0)$ y $w_1 \in \operatorname{Ker} u_0^tu_0$.

Por lo que $\alpha = 0$ y $w \in [u_0]^\perp = \operatorname{Ker} u_0^tu_0$, de donde $w \in \operatorname{Ker} P(\lambda_0;p_0)$; es decir w es un vector propio de $P(\lambda;p_0)$ de valor propio λ_0, pero el valor propio λ_0 es simple luego $w = \beta v_0$, pero por el lema 1, tenemos $u_0^tv_0 \neq 0$ lo que implica $\beta = 0$ y $w = 0$. □

Teorema 1 *El sistema*

$$(\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}(\frac{\partial}{\partial\lambda}P(\lambda;p))+\frac{\partial P(\lambda;p)}{\partial p_i})_{|(\lambda_0,p_0)}v_0(p_0)=-P(\lambda_0;p_0)\frac{\partial v_0(p)}{\partial p_i}_{|(\lambda_0,p_0)}$$

tiene una solución si y sólo si

$$u_0^t(\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}(\frac{\partial}{\partial\lambda}P(\lambda;p))+\frac{\partial P(\lambda;p)}{\partial p_i})_{|(\lambda_0,p_0)}v_0(p_0)=0 \tag{6}$$

Demostración: Si el sistema tiene una solución entonces existe un vector propio por la izquierda u_0 para el valor propio λ_0, luego (6) se cumple.

Recíprocamente. Supongamos que (6) se verifica, teniendo en cuenta el lema 2 obtenemos una solución para $\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}_{|(\lambda_0,p_0)}$:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}_{|(\lambda_0;p_0)}=-\frac{\frac{\partial P(\lambda;p)}{\partial p_i}_{|(\lambda_0,p_0)}v_0(p_0)}{u_0^t(\frac{\partial}{\partial\lambda}P(\lambda;p))_{|(\lambda_0;p_0)}v_0(p_0)}.$$

Una vez conocido el valor de $\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}_{|(\lambda_0,p_0)}$ podemos despejar $\frac{\partial v(p)}{\partial p_i}$, de la siguiente manera, puesto que $u^tP(\lambda_0;p_0)=0$ y $S=P(\lambda_0;p_0)+u_0^tu_0$ es invertible podemos añadir a la derecha de la ecuación

$$(\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}(\frac{\partial}{\partial\lambda}P(\lambda;p))+\frac{\partial P(\lambda;p)}{\partial p_i})_{|(\lambda_0,p_0)}v_0(p_0)=-P(\lambda_0;p_0)\frac{\partial v_0(p)}{\partial p_i}_{|(\lambda_0,p_0)}$$

el término $u_0^tu_0\frac{\partial v_0(p)}{\partial p_i}_{|(\lambda_0,p_0)}$, teniendo

$$(\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}(\frac{\partial}{\partial\lambda}P(\lambda;p))+\frac{\partial P(\lambda;p)}{\partial p_i})_{|(\lambda_0,p_0)}v_0(p_0)=-S\frac{\partial v_0(p)}{\partial p_i}_{|(\lambda_0,p_0)}$$

y

$$\frac{\partial v_0(p)}{\partial p_i}_{|(\lambda_0,p_0)}=-S^{-1}(\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}(\frac{\partial}{\partial\lambda}P(\lambda;p))+\frac{\partial P(\lambda;p)}{\partial p_i})_{|(\lambda_0,p_0)}v_0(p_0)$$

$\square$

Ejemplo 2 Sea $P(\lambda;p)=\lambda^2I_3+A(p)$ con

$$A(p)=\begin{pmatrix}-p_1 & p_2 & 0\\ p_2 & -p_1 & p_1+p_2\\ 0 & p_2 & -p_1\end{pmatrix},$$

una matriz polinomial mónica de segundo grado a dos parámetros. En $p_0=(1,1)$ la matriz polinomial es

$$P(\lambda;p_0)=\begin{pmatrix}\lambda^2-1 & 1 & 0\\ 1 & \lambda^2-1 & 2\\ 0 & 1 & \lambda^2-1\end{pmatrix}$$

que tiene el valor propio simple $\lambda_0 = 1$. Un vector propio para este valor propio es $v_0(p_0) = (2, 0, -1)^t$ y un vector propio por la izquierda de $P(\lambda_0, p_0)$ puede ser $u_0^t = (1, 0, -1)$, entonces $u_0^t v_0(p_0) = 3 \neq 0$.

Calculando $\dfrac{\partial A(p)}{\partial p_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ tenemos

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_1}_{|(\lambda_0, p_0)} = \frac{1}{2}.$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/6 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Entonces, $\dfrac{\partial v_0(p)}{\partial p_1} = (1/3, 0, 1/3)$ salvo el término aditivo $\alpha v_0(p_0)$.

Análogamente, calculamos $\dfrac{\partial v_0(p)}{\partial p_2}$.

Para esto, $\dfrac{\partial A(p)}{\partial p_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, y tenemos $\dfrac{\partial \lambda}{\partial p_2}_{|(\lambda_0, p_0)} = 0$. Entonces

$$\frac{\partial v_0(p)}{\partial p_2}_{|(\lambda_0, p_0)} = (-1/3, 0, -1/3).$$

Observamos que $\lambda(p) = \sqrt{p_1}$ es un valor propio simple, un vector propio es $v_0(p) = (p_1 + p_2, 0, -p_2)$, y para $\alpha = 1/3$ obtenemos la solución exacta $\dfrac{\partial v_0(p)}{\partial p_1} = (1, 0, 0) = (1/3, 0, 1/3) + 1/3(2, 0, -1)$, y para $\alpha = 2/3$ el valor exacto para $\dfrac{\partial v_0(p)}{\partial p_2} = (1, 0, -1) = (-1/3, 0, -1/3) + 2/3(2, 0, -1)$.

Referencias

[1] P. Benner, V. Mehrmann, H. Xu, *Perturbation Analysis for the Eigenvalue Problem of a Formal Product of Matrices*, BIT, Numerical Mathematics, **42**, pp. 1-43, (2002).

[2] A. P. Seyranian, A.A. Mailybaev, *Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications*, World Scientific, Singapore, 2003.

[3] F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices I, II*, Chelsea Pub. Co. New York (1977).

[4] Mª I. García, *Introducción a la Teoría de Matrices Polinomiales*. Edicions UPC, Barcelona, 1999.

[5] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman, *Matrix Polynomials*, Academic Press, New York, 1982.

[6] G.W. Stewart, J. Sun, *Matrix Perturbation Theory*, Academic Press, New York, 1990.